Equazioni di Eulero

♣ Sono equazioni di ordine n della forma

$$t^n y^{(n)}(t) + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots \tag{1}$$
$$+ a_1 t y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad t \in I,$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Si noti che $t_0 = 0$ è un punto singolare per l'equazione, che è quindi data su $I = (0, +\infty)$, oppure su $I = (-\infty, 0)$.

♣ Si effettua il cambiamento di variabile $t \to s$, con

$$\begin{cases} t = e^s & \text{se } t \in I = (0, +\infty), \\ t = -e^s & \text{se } t \in I = (-\infty, 0). \end{cases}$$

Esercizio 15

Risolvere

$$\begin{cases} t^2 y''(t) + 3ty'(t) - 3y(t) = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

È un'equazione di Eulero, data su $I = (0, +\infty)$ (infatti le condizioni iniziali sono per $t_0 = 1$).

Quindi poniamo $t = e^s$ e consideriamo la funzione

$$z(s) = y(e^s)$$

da cui

$$\begin{aligned} &z'(s) = e^s y'(e^s), \\ &z''(s) = (e^s y'(e^s))' = e^s y'(e^s) + e^{2s} y''(e^s) \end{aligned}$$

cosicché

$$\begin{cases} y'(t) = y'(e^s) = e^{-s} z'(s) \\ y''(t) = y''(e^s) = e^{-2s}\left(z''(s) - z'(s)\right) \end{cases} \tag{2}$$

Le condizioni iniziali per y diventano

$$\begin{cases} 1 = y(1) = y(e^0) = z(0) \\ 0 = y'(1) = e^0 y'(e^0) = z'(0) \end{cases} \tag{3}$$

Sostituendo (2) nell'equazione e tenendo conto di (3), si ottiene il problema di Cauchy in z

$$\begin{cases} z''(s) + 2z'(s) - 3z(s) = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$z(s) = \frac{3}{4} e^s + \frac{1}{4} e^{-3s}.$$

Allora

$$y(t) = z(\log(t)) = \frac{3}{4} t + \frac{1}{4} t^{-3}, \qquad t \in (0, +\infty).$$

Esercizio 16

Risolvere

$$\begin{cases} t^2 y''(t) + t y'(t) + y(t) = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Poniamo $t = e^s$ e $z(s) = y(e^s)$. Quindi l'equazione differenziale diventa

$$e^{2s}e^{-2s}(z''(s) - z'(s)) + e^s e^{-s} z'(s) + z(s) = 0.$$

Si ottiene allora il problema di Cauchy in z

$$\begin{cases} z''(s) + z(s) = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(1) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$z(s) = \cos(s) + \sin(s),$$

da cui

$$y(t) = z\left(\log(t)\right) = \cos\left(\log(t)\right) + \sin\left(\log(t)\right), \qquad t \in (0, +\infty).$$